

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐẠO HÀM VÀ BÀI TOÁN CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

ThS. Nguyễn Thu Hằng

Hà nội, tháng 12 năm 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐẠO HÀM VÀ BÀI TOÁN CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

Xác nhận của bộ môn

Hà nội, tháng 12 năm 2024

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	1
1. Một số kiến thức cơ bản về đạo hàm	2
2. Bài toán các đại lượng liên quan	5
Kết luận	12

LỜI GIỚI THIỆU

Giải tích, được biết đến trong lịch sử ban đầu của nó là phép tính vô cùng bé, là một môn toán học tập trung vào các giới hạn, hàm, đạo hàm, tích phân và chuỗi vô hạn. Isaac Newton và Gottfried Leibniz đã độc lập phát hiện ra phép tính vào giữa thế kỷ 17. Hai ký hiệu riêng biệt thường được sử dụng cho đạo hàm, một ký hiệu từ Leibniz và một ký hiệu khác từ Joseph Louis Lagrange. Theo ký hiệu của Leibniz, một vô cùng bé theo x được ký hiệu là dx và đạo hàm của y theo x được viết như tỷ lệ của hai đại lượng vô cùng bé $\frac{dy}{dx}$. Trong ký hiệu của Lagrange, đạo hàm tương ứng với x của hàm $f(x)$ được ký hiệu là $f'(x)$.

Đạo hàm của hàm một biến tại một giá trị đầu vào được chọn, khi nó tồn tại, là độ dốc của đường tiếp tuyến với đồ thị của hàm tại điểm đó. Đường tiếp tuyến là xấp xỉ tuyến tính tốt nhất của hàm gần giá trị đầu vào đó. Vì lý do này, đạo hàm thường được mô tả là "tốc độ thay đổi tức thời", tỷ lệ của thay đổi tức thời trong biến phụ thuộc so với biến độc lập.

Đạo hàm của hàm một biến thực đo lường độ nhạy đối với thay đổi của giá trị hàm (giá trị đầu ra) đối với sự thay đổi trong đối số của nó (giá trị đầu vào). Đạo hàm là một công cụ cơ bản của tính toán. Ví dụ, đạo hàm của vị trí của vật chuyển động theo thời gian là vận tốc của vật thể: điều này đo lường vị trí của vật thể thay đổi nhanh như thế nào khi thời gian tăng lên.

Đạo hàm là nội dung giảng dạy cơ bản, quan trọng trong chương trình phổ thông và đại học. Đạo hàm có nhiều ứng dụng thực tiễn trong hầu hết các lĩnh vực khoa học tự nhiên, kinh tế xã hội. Báo cáo này trình bày một trong những ứng dụng của đạo hàm giải quyết bài toán “các đại lượng liên quan”.

Nội dung báo cáo chia làm 3 phần

Phần 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về đạo hàm.

Phần 2: Trình bày ứng dụng của đạo hàm trong bài toán các đại lượng liên quan

1. Một số kiến thức cơ bản về đạo hàm

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa. Cho $x_0 \in D(f)$. Đạo hàm của hàm f tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$, được định nghĩa

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn)}$$

Nếu tồn tại đạo hàm tại x_0 ta nói f khả vi tại x_0 .

Đặt $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến số,

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia của hàm số tại x_0 tương ứng với số gia của biến số.

Khi đó

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Công thức này cho thấy đạo hàm còn có thể được hiểu như một đại lượng đo tốc độ thay đổi của hàm số so với biến số.

1.2. Tính chất của hàm có đạo hàm

Tính chất 1. Nếu f có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0 .

Tính chất 2. Nếu u và v khả vi tại x , và k_1, k_2 là các hằng số thực bất kì thì

$k_1 u + k_2 v, uv, \frac{u}{v}$ ($v(x) \neq 0$) khả vi tại x , đồng thời

- i. $(k_1 u + k_2 v)'(x) = k_1 u'(x) + k_2 v'(x);$
- ii. $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x);$
- iii. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$

Tính chất 3. (Đạo hàm của hàm hợp)

Nếu $f(u)$ khả vi tại điểm $u = g(x)$ và $g(x)$ khả vi tại x thì hàm hợp $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ khả vi tại x và $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Trong ký hiệu Leibniz, nếu $y = f(u)$ và $u = g(x)$ thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \Big|_{g(x)} \frac{du}{dx}.$$

Tính chất 4. (Đạo hàm hàm ngược) Cho hàm f khả vi liên tục trên khoảng I và $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in I$. Kí hiệu $T = \{f(x) | x \in I\}$ là tập ảnh của I qua f . Khi đó, tồn tại hàm ngược $f^{-1}: T \rightarrow I$ khả vi tại mọi $x \in T$. Hơn nữa,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}, \forall b \in T$$

Nói cách khác,

$$\frac{df^{-1}}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{1}{\frac{df}{dx} \Big|_{x=f^{-1}(b)}}, \forall b \in T.$$

Bảng đạo hàm cơ bản

$(C)' = 0, \forall C \in \mathbb{R}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(e^x)' = e^x$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0$	$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tính chất 5. (Đạo hàm hàm ẩn) Một phương trình dạng $F(x, y) = 0$ (*) rõ ràng xác định mối quan hệ ngầm giữa các biến x và y . Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, thay vào (*), ta có thể không tìm được hoặc tìm được một hay nhiều giá trị y thỏa mãn phương trình. Nếu với mỗi $x \in D$, thay vào (*) ta tìm được chỉ một giá trị y thỏa mãn, thì ta nói rằng phương trình (*) xác định một hàm ẩn $y = f(x)$ trên D , hay nói cách khác, hàm $y = f(x)$, $x \in D$ ẩn trong phương trình (*).

Nếu từ (*) ta giải được y theo x thì việc tính đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ được tính theo các quy tắc thông thường. Tuy nhiên, việc giải tường minh hàm ẩn $y = f(x)$ từ phương trình (*) là thường không dễ dàng. Để tính được $\frac{dy}{dx}$ mà không cần giải y theo x , ta làm theo các bước sau đây:

B1. Đạo hàm cả hai vế của phương trình $F(x, y) = 0$ theo biến x , coi y là hàm của x .

B2. Giải $\frac{dy}{dx}$ từ phương trình thu được sau khi đạo hàm.

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ tại điểm $M(1, 1)$.

Lời giải. Đạo hàm hai vế của phương trình $x^2 + y^2 = 2$ theo biến x ta được

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Suy ra,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}.$$

Độ dốc của tiếp tuyến tại M là

$$m_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1, y=1} = -1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại M là

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

2. Bài toán các đại lượng liên quan

Giả sử chúng ta có hai đại lượng x và y cùng thay đổi theo biến t (thường là biến thời gian). Bài toán các đại lượng liên quan, hay còn gọi là bài toán tỉ lệ liên quan (related rates) là bài toán mà chúng ta biết một trong các tỉ lệ thay đổi tại một thời điểm nhất định, chẳng hạn $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ và chúng ta muốn tìm tỉ lệ khác (chẳng hạn $\frac{dy}{dt}$) tại thời điểm đó.

Nếu y được biểu diễn theo x , tức là ta có $y = f(x)$, thì vấn đề này dễ dàng thực hiện được dựa theo công thức đạo hàm hàm hợp

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot x'(t).$$

Xét một ví dụ đầu tiên đơn giản

Ví dụ 1. Giả sử một vật đang chuyển động theo đường đi được mô tả bởi $y = x^2$, tức là nó đang chuyển động theo đường parabol. tại một thời điểm cụ thể $t = 5$, tọa độ của x bằng 6 và chúng ta đo tốc độ thay đổi của x theo thời gian là $\frac{dx}{dt} = 3$. Hỏi đồng thời khi đó, tọa độ của y thay đổi nhanh như thế nào?

Lời giải. Sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp ta có

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Tại $t = 5$, ta có $x = 6$ và $\frac{dx}{dt} = 3$. Do đó

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36.$$

Ví dụ 2. Giả sử ta đang bơm không khí vào một quả bóng hình cầu. Cả khối lượng và bán kính của quả bóng đều tăng theo thời gian. Nếu V là thể tích và r là bán kính của quả bóng tại một thời điểm tức thời thì

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Chúng ta đạo hàm cả hai vế của phương trình trên theo t để tìm một phương trình liên quan đến tốc độ thay đổi tức thời của V và r ,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Vì vậy, nếu chúng ta biết bán kính r của quả bóng và tốc độ tăng thể tích V tại một thời điểm nhất định, thì chúng ta có thể giải phương trình này để tìm ra dr/dt - tốc độ tăng bán kính tại thời điểm đó. Lưu ý rằng việc đo trực tiếp tốc độ tăng thể tích (tốc độ mà không khí được bơm vào khinh khí cầu) sẽ dễ dàng hơn so với đo sự gia tăng của bán kính. Phương trình các đại lượng liên quan cho phép chúng ta tính toán dr/dt từ dV/dt .

Trong nhiều trường hợp khác, x và y có thể được liên hệ với nhau theo những cách khác nhau, ví dụ như $x = f(y)$ hay $F(x, y) = 0$ hoặc $F(x, y) = G(x, y)$. Trong những tình huống này, chúng ta vẫn áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, đạo hàm hàm ẩn rồi sau đó thay các giá trị đã biết để tìm giá trị chưa biết.

Ta có thể tóm tắt các bước làm bài toán tỉ lệ liên quan như sau:

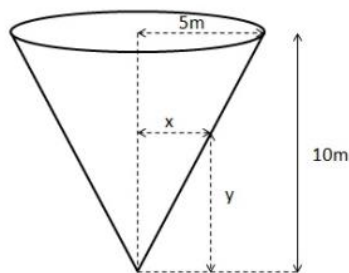
- B1. Phác họa một bức tranh về bài toán và đặt tên cho các biến và hằng. Sử dụng t cho thời gian. Giả định rằng tất cả các biến là các hàm khả vi theo t .
- B2. Viết lại giả thiết (về các ký hiệu đã chọn ở trên).
- B3. Viết ra yêu cầu của bài toán (thường là tỷ lệ, được biểu thị dưới dạng đạo hàm).
- B4. Tìm một phương trình liên quan đến các biến. Chúng ta có thể phải kết hợp hai hoặc nhiều phương trình để có được một phương trình duy nhất liên quan đến biến có tỷ lệ cần tính với các biến có tỷ lệ đã biết.
- B5. Đạo hàm theo t . Sau đó biểu thị tỷ lệ cần tìm theo tỷ lệ và biến khác.
- B6. Đánh giá. Sử dụng các giá trị đã biết để tìm tỷ lệ chưa biết.

Ví dụ 3. Nước chảy vào bể hình nón với tốc độ $9m^3 / \text{phút}$ của bể đứng xuống và có chiều cao 10 m và bán kính cơ sở là 5 m. Mức nước biến đổi nhanh đến mức nào khi nước dâng sâu 6 m?

Lời giải.

Các đại lượng thay đổi trong bài toán là

- $V(t)$ - thể tích nước (m^3) trong bể tại thời điểm t ;
- $x(t)$ là bán kính (m) bề mặt của nước ở thời điểm t ;
- $y(t)$ là độ sâu (m) của nước ở thời điểm t .



Chúng ta cần tính $\frac{dy}{dt}$ khi biết $y = 6, \frac{dV}{dt} = 9$.

Ta dễ dàng tính được

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y, \text{ và } x = y / 2.$$

Do đó, $V = \frac{1}{12} \pi y^3$, dẫn đến

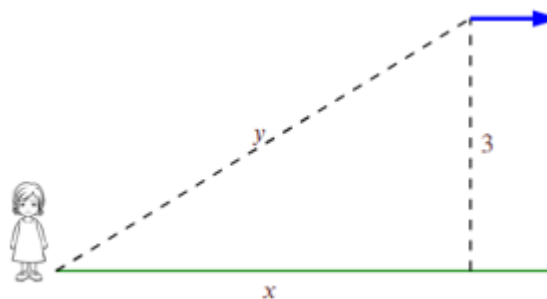
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi y^2 \frac{dy}{dt}.$$

Theo giả thiết $y = 6, \frac{dV}{dt} = 9$, suy ra $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32m / \text{phút}$.

Nói cách khác, mực nước có tốc độ thay đổi là $0,32m / \text{phút}$.

Ví dụ 4. Một chiếc máy bay đang bay thẳng ra xa chỗ bạn đứng với vận tốc 500 dặm/giờ. Ở độ cao 3 dặm khoảng cách giữa máy bay và bạn tăng nhanh như thế nào tại thời điểm máy bay đang bay qua một điểm trên mặt đất cách bạn bốn dặm?

Lời giải.



Vì máy bay đang bay theo hướng ngang ra xa chỗ bạn đứng. Gọi x là tốc độ của máy bay.

Theo đề bài $\frac{dx}{dt} = 500$. Khoảng cách giữa bạn và máy bay là y . Chúng ta cần tính $\frac{dy}{dt}$.

Theo định lí Pitago, ta có $x^2 + 9 = y^2$. Lấy đạo hàm hai vế theo t ta được

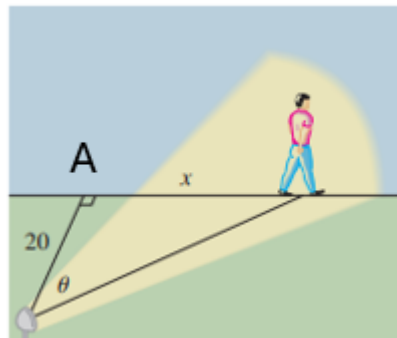
$$2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2y \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Chúng ta quan tâm tại thời điểm $x = 4$. Tại thời điểm này $y^2 = 4^2 + 9 = 25$ nên $y = 5$. Và ta thu được

$$2 \cdot 4 \cdot 500 = 2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Suy ra, $\frac{dy}{dt} = 400$ (dặm/giờ).

Ví dụ 5. Một người đi bộ dọc theo đường thẳng với vận tốc 3 m/s. Một đèn pha được đặt trên mặt đất cách đường đi 20 m và được giữ tập trung vào người đàn ông. Hỏi đèn pha quay với vận tốc bao nhiêu khi người đàn ông cách điểm trên đường đi mà gần đèn pha nhất là 15 m?



Lời giải.

Gọi x là khoảng cách giữa người đàn ông tới điểm A – điểm gần đèn pha nhất trên đường đi và θ là góc giữa chùm tia sáng của đèn pha và đường vuông góc với đường đi (hình vẽ).

Theo giả thiết ta có

$$\frac{dx}{dt} = 3(m/s)$$

Chúng ta cần tìm $\frac{d\theta}{dt}$ khi $x = 15$.

Phương trình liên hệ giữa x và θ có thể viết là $\frac{x}{20} = \tan \theta$ hay $x = 20 \tan \theta$.

Đạo hàm 2 vế theo t ta được

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Suy ra

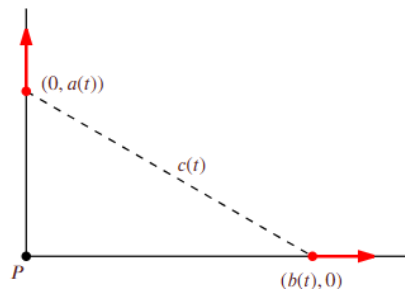
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20} \cos^2 \theta \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{20} \cos^2 \theta \cdot 4 = \frac{1}{5} \cos^2 \theta.$$

Khi $x = 15$, dùng định lí Pitago tính được khoảng cách đèn tới người đàn ông là 25m. Do đó, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ và

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{16}{125} = 0,128.$$

Vậy đèn quay với vận tốc 0,128 rad/s.

Ví dụ 6. Một con đường chạy theo hướng Bắc - Nam cắt một con đường chạy theo hướng Đông -Tây tại điểm P. Xe A đang lái về phía Bắc dọc theo con đường thứ nhất và xe B đang lái về hướng Đông dọc theo con đường thứ hai. Tại một thời điểm cụ thể Xe A cách điểm P 10 km về phía Bắc và đang chạy với vận tốc 80 km/h trong khi xe B cách điểm P 15 km về phía Đông và đang chạy với vận tốc 100 km/h khoảng cách giữa hai xe thay đổi nhanh như thế nào



Lời giải.

Gọi $a(t)$ là khoảng cách của xe A đến điểm P tại thời điểm t và Gọi $b(t)$ là khoảng cách của xe B đến điểm P tại thời điểm t . Gọi $c(t)$ là khoảng cách giữa 2 xe tại thời điểm t . Theo định lí Pitago, $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$. Đạo hàm 2 vế theo t ta được

$$2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t) = 2c(t)c'(t).$$

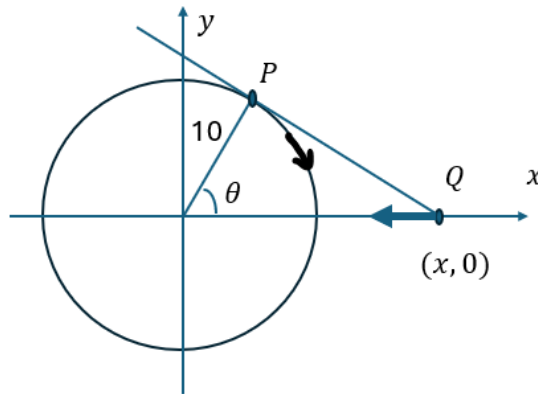
Suy ra

$$c'(t) = \frac{2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)}{2c(t)} = \frac{a(t)a'(t) + b(t)b'(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}}.$$

Tại thời điểm đang xét, thay các giá trị đã biết vào ta được

$$c'(t) = \frac{10.80 + 15.100}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{460}{\sqrt{13}} \approx 127,6 \text{ km/h}.$$

Ví dụ 7. Một chất điểm P chuyển động theo chiều kim đồng hồ với vận tốc không đổi dọc theo một đường tròn bán kính 10 m có tâm tại gốc tọa độ. Vị trí ban đầu của chất điểm là (0,10) trên trục Oy và đích đến là điểm (10,0) trên trục Ox. Khi chất điểm chuyển động, đường tiếp tuyến tại P cắt trục Ox tại điểm Q. Nếu chất điểm mất 30 giây để chuyển di chuyển từ điểm đầu đến cuối thì điểm Q di chuyển dọc theo trục Ox nhanh như thế nào khi nó cách tâm đường tròn 20 m?



Lời giải. Vì chất điểm di chuyển từ điểm đầu đến điểm cuối (quãng đường $\pi/2$) trong 30 giây (1/2 phút) nên nó di chuyển theo chiều kim đồng hồ theo đường tròn với vận tốc π (rad/phút). Nghĩa là

$$\frac{d\theta}{dt} = -\pi.$$

Dấu âm ở đây thể hiện θ giảm dần theo thời gian.

Đặt $x(t)$ là khoảng cách tại thời điểm t của điểm Q đến gốc tọa độ. Chúng ta muốn tính $\frac{dx}{dt}$ khi $x = 20m$ và $\frac{d\theta}{dt} = -\pi$ (rad/phút).

Tiếp theo chúng ta tìm mối quan hệ giữa x và θ . Từ hình vẽ ta thấy

$$x \cdot \cos \theta = 10 \text{ hay } x = \frac{10}{\cos \theta}.$$

Lấy đạo hàm 2 vế theo t ta được

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10 \cdot \sin \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -10\pi \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Chú ý rằng $\frac{dx}{dt} < 0$ vì x giảm khi t tăng.

Khi $x = 20$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ thì $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó,

$$\frac{dx}{dt} = -10\pi \cdot 2\sqrt{3} = -20\sqrt{3}\pi \approx 108,8 \text{ (m/phút)}.$$

KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày lại một số kiến thức cơ bản về đạo hàm cùng bài toán các đại lượng liên quan. Bài toán này là một trong những ứng dụng thường thấy của đạo hàm trong các lĩnh vực khác nhau. Báo cáo có thể sử dụng như tài liệu tham khảo cho giảng viên và sinh viên trong học phần giải tích 1.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Jr. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, *Thomas's Calculus early transcendentals*, Twelfth Edition, Pearson Education, Inc., 2009.
2. Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp, tập 2*, Tái bản lần thứ 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2006.
3. N.T.Thanh, N.T.Hằng, N.T.Lâm, N.T.Hằng, N.T.Linh, M.V.Thuận, *Giáo trình Giải tích 1*, NXB đại học Quốc gia Hà Nội, 2020.